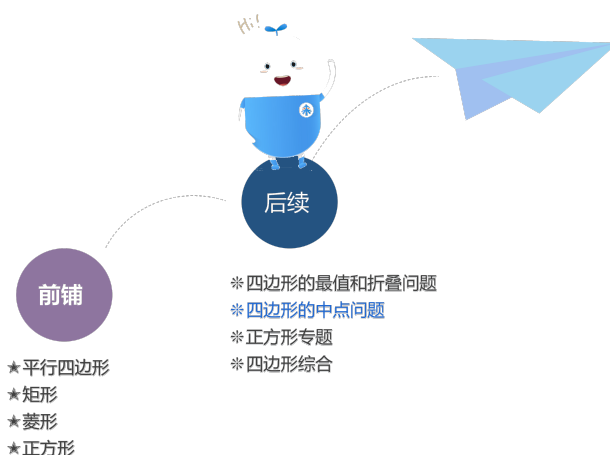
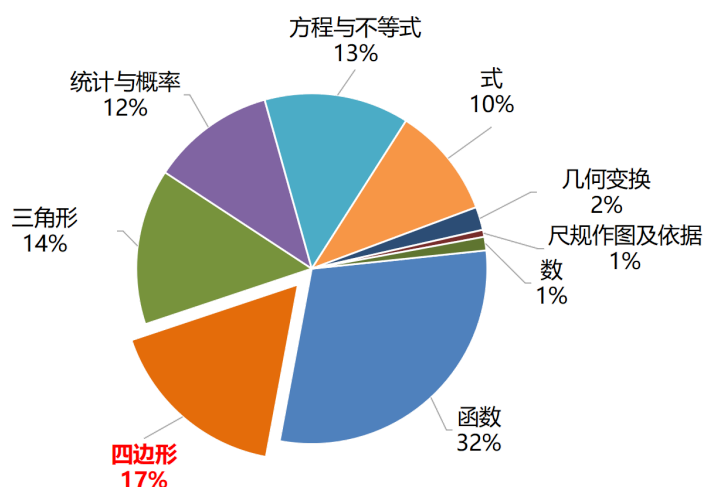


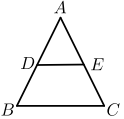
第1讲 中位线与中点四边形

平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《四边形的中点问题》，旨在帮助学生了解并熟练掌握四边形中点的相关性质，学会利用中点解决问题。

本模块难度稍难，适应于四边形的基础认知与短期突破，本模块分为中位线与中点四边形、中点辅助线综合2讲内容，帮助学生了解四边形中点这部分常见题型，掌握解题思路。



一、三角形中位线

三角形中位线	定义：连接三角形两边_____的线段叫做三角形的中位线．
	定理：三角形的中位线_____于三角形的第三边，并且等于第三边的_____ 书写：若DE为$\triangle ABC$的中位线，则_____

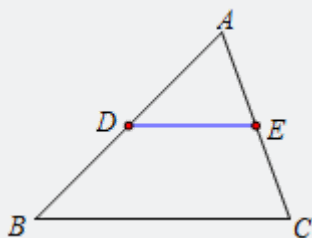
【教法备注】

1、三角形中位线定义：

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线．

2、三角形中位线定理：

三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半．

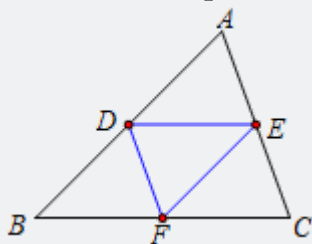


如上图， $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ ．

拓展：

三角形中位线中隐含的重要性质

三角形有三条中位线，三条中位线把原三角形分成可重合的4个小三角形，每个小三角形的周长为原三角形周长的 $\frac{1}{2}$ ，每个小三角形的面积为原三角形面积的 $\frac{1}{4}$ ．



即：① $\triangle ADE \cong \triangle DBF \cong \triangle FDE \cong \triangle EFC$

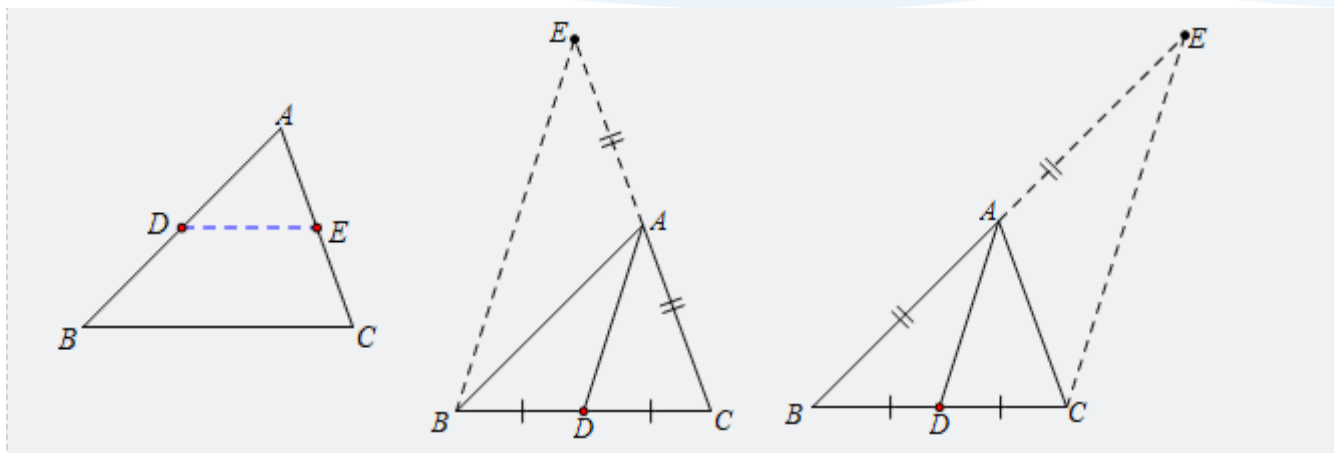
$$\textcircled{2} S_{\triangle ADE} = S_{\triangle DBF} = S_{\triangle FDE} = S_{\triangle EFC}$$

$$\textcircled{3} C_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}C_{\triangle ABC}, S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

总结：

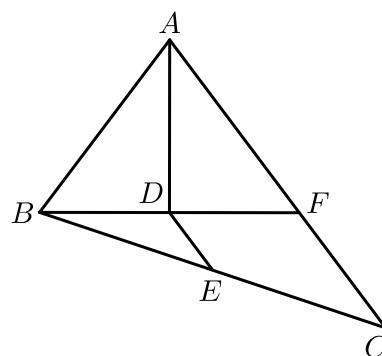
①三角形的中位线与第三边都有相应的位置关系和数量关系，位置关系可以证明两条直线平行，数量关系可以证明线段的倍分关系．

②当已知条件中的中点较多，要联想“三角形的中位线”，不是中位线的，可以通过辅助线构造．



例题1

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $AC = 10\text{cm}$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $BD \perp AD$ 于点 D ， BD 的延长线交 AC 于点 F ， E 为 BC 的中点，则 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 2

【解析】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $BD \perp AD$ ，

$$\therefore AB = AF = 6, BD = DF,$$

$$\therefore CF = AC - AF = 4$$

$\because BD = DF$ ， E 为 BC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CF = 2,$$

故答案为：2。

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

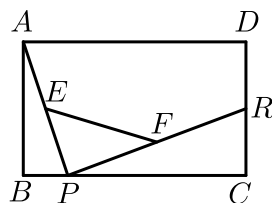
2. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，点 P 是 BC 边上任意一点， E ， F ， R 分别是 AP ， RP ， CD 的中点，则 EF 的长为（ ）。

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$



【答案】B

【解析】连接AR，

∵ 四边形ABCD是矩形，

∴ $\angle D = 90^\circ$ ，

$AB = DC = 2$ ，

∵ R是CD的中点，

∴ $DR = 1$ ，

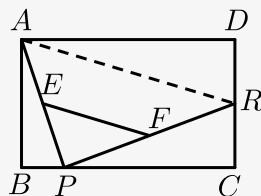
由勾股定理得， $AR = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ，

∵ E、F分别是PA、PR的中点，

∴ EF是△APR的中位线，

∴ $EF = \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

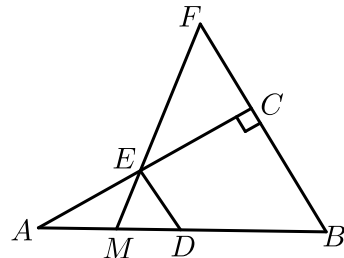
故选：B。



【标注】【知识点】矩形的性质

练习1

3. 如图，在Rt△ABC中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，DE为△ABC的中位线，延长BC至点F，使 $CF = \frac{1}{2}BC$ ，连结FE并延长，交AB于点M。若 $BC = a$ ，则△FMB的周长为_____。



【答案】 $\frac{9a}{2}$

【解析】在Rt△ABC中， $\angle B = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 30^\circ, \therefore AB = 2BC = 2a,$$

$$\therefore AC = \sqrt{3}a$$

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore FE = a,$$

$$\therefore \angle FEC = 30^\circ, \therefore \angle AEM = 30^\circ = \angle A,$$

$$\therefore EM = AM,$$

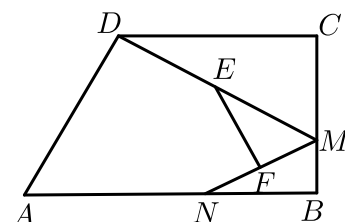
$$\therefore \triangle FMB \text{ 的周长} = BF + FE + EM + BM,$$

$$= BF + FE + AM + MB$$

$$= BC + CF + FE + AB = \frac{9a}{2}.$$

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

4. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 5$, 点 M 、 N 分别为 BC 、 AB 上的动点 (含端点), E 、 F 分别为 DM 、 MN 的中点, 则 EF 长度的最小值为 ().



A. 3

B. 2.5

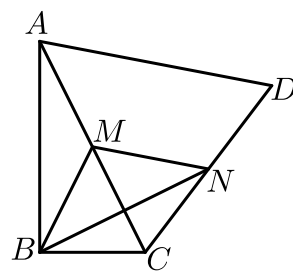
C. 2

D. 1

【答案】 B

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

5. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = AD$, M 、 N 分别为 AC 、 CD 的中点, 连接 BM 、 MN 、 BN .



(1) 求证: $BM = MN$.

(2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, $AC = 2$, 求 BN 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 在 $\triangle CAD$ 中 .

$\because M、N$ 分别是 $AC、CD$ 的中点 ,

$\therefore MN \parallel AD$, $MN = \frac{1}{2}AD$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 .

$\because M$ 是 AC 的中点 ,

$\therefore BM = \frac{1}{2}AC$.

$\because AC = AD$,

$\therefore MN = BM$.

(2) $\because \angle BAD = 60^\circ$,

AC 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$.

由 (1) 可知 , $BM = \frac{1}{2}AC = AM = MC$,

$\therefore \angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\angle BAM = 60^\circ$.

$\because MN \parallel AD$,

$\therefore \angle NMC = \angle DAC = 30^\circ$,

$\therefore \angle BMN = \angle BMC + \angle NMC = 90^\circ$,

$\therefore BN^2 = BM^2 + MN^2$.

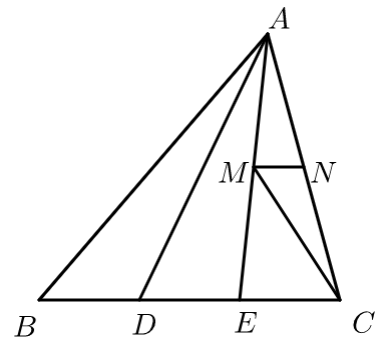
由 (1) 可知 , $MN = BM = \frac{1}{2}AC = 1$,

$\therefore BN = \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

|| 例题2

6. 在 $\triangle ABC$ 中 , $D、E$ 为 BC 边的三等分点 , $M、N$ 分别为 $AE、AC$ 的中点 , $\triangle ABC$ 的面积为 24 平方厘米 , 则 $\triangle MNC$ 的面积为 _____ 平方厘米 .



【答案】 2

【解析】 $\because BD = DE = CE$,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADE} = S_{\triangle AEC} = 8,$$

$$\because MA = ME,$$

$$\therefore S_{\triangle AMC} = S_{\triangle EMC} = 4,$$

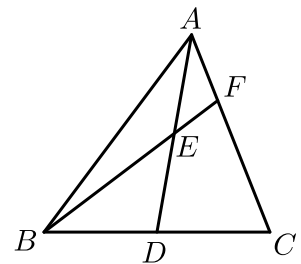
$$\because NA = NC,$$

$$\therefore S_{\triangle MNA} = S_{\triangle MNC} = 2.$$

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

练习2

7. 如图所示， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AD 的中点， BE 的延长线与 AC 交于点 F ，则 $AF:AC$ 等于（ ）.



A. 1:2

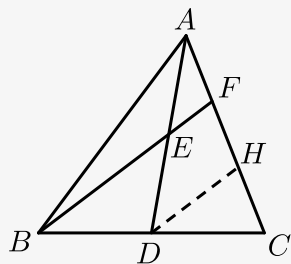
B. 1:3

C. 2:3

D. 2:5

【答案】 B

【解析】 作 $DH \parallel BF$ 交 AC 于 H ,



$\because DH \parallel BF$, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore CH = HF$,

$\because DH \parallel BF$, E 是 AD 的中点,

$\therefore AF = FH$,

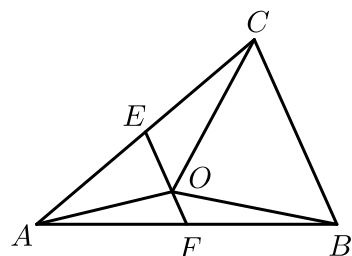
$\therefore AF = FH = HC$,

$\therefore AF : AC = 1 : 3$,

故选 B.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

8. 如图, EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线, O 是 EF 上一点, 且满足 $OE = 2OF$. 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比为 ().



A. 2

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{3}$

D. 3

【答案】 D

【解析】 $\because EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}BC$,

$\because OE = 2OF$,

$\therefore OE = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1+2}BC = \frac{1}{3}BC$,

设点 A 到 BC 的距离为 h ,

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h$, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}OE \cdot h = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}BC \cdot h = \frac{1}{6}BC \cdot h$,

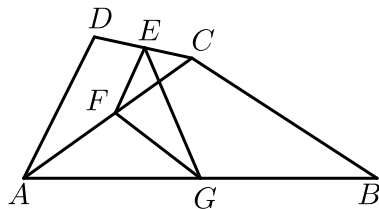
$\therefore \triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比 = 3.

故选 : D.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

|| 例题3

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 分别为 DC 、 AC 、 AB 的中点，且有 $\angle DAB + \angle B = 90^\circ$ ， $AD = 6$ ， $BC = 8$ ，则 $EG = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



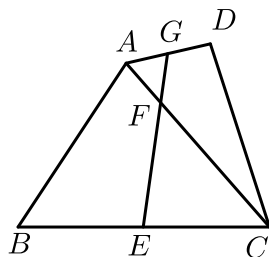
【答案】 5

【解析】 $\because \angle DAB + \angle B = 90^\circ$ ， EF 是 $\triangle CAD$ 的中位线， FG 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $AD = 6$ ， $BC = 8$ ，
 $\therefore \angle EFG = \angle EFC + \angle CFG = \angle DAC + \angle CAB + \angle AGF = \angle DAC + \angle CAB + \angle B = 90^\circ$ ，
 $EF = 3$ ， $FG = 4$ ，
 $\therefore \triangle EFG$ 是一个直角三角形，
 $\therefore EG = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。
故答案为：5。

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

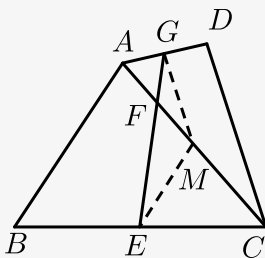
|| 练习3

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， E 是 BC 的中点， G 是 AD 的中点， EG 交 AC 于点 F ， $\angle ACD = 30^\circ$ ， $\angle CAB = 70^\circ$ ，则 $\angle AFG$ 的度数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 50°

【解析】 取 AC 的中点 M ，连接 GM 、 EM ，

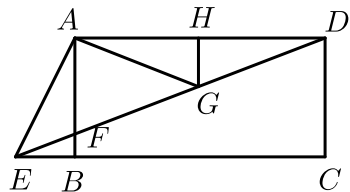


$\because G$ 是 AD 的中点, E 是 BC 的中点,
 $\therefore GM$ 是 $\triangle ADC$ 的中位线, EM 是 $\triangle ABC$ 的中位线,
 $\therefore GM = \frac{1}{2}DC$, $EM = \frac{1}{2}AB$, $GM \parallel CD$, $EM \parallel AB$,
 $\because AB = CD$,
 $\therefore GM = EM$,
 $\therefore \angle GEM = \angle EGM$.
 $\because EM \parallel AB$,
 $\therefore \angle AME = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$,
 $\because GM \parallel CD$,
 $\therefore \angle AMG = \angle ACD = 30^\circ$,
 $\therefore \angle EMG = 110^\circ + 30^\circ = 140^\circ$,
 $\therefore \angle EGM = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$,
 $\therefore \angle AFG = \angle EGM + \angle AMG = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

|| 例题4

11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 连接 DE 交 AB 于点 F , $\angle AED = 2\angle CED$, 点 G 是 DF 的中点, 若 $BE = 2$, $BF = 1$, $AG = 5$, 点 H 是 AD 的中点, 则 $GH =$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

【解析】 $\because$ 矩形 $ABCD$,
 $\therefore AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$,
 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中,

G 为 DF 中点,

$$\therefore AG = \frac{1}{2}DF = DG,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle GAD,$$

$$\text{设 } \angle ADE = \angle GAD = x,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle GAD + \angle ADG$$

$$= x + x$$

$$= 2x,$$

$$\text{又 } \because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BED = \angle ADE = x,$$

$$\text{又 } \because \angle AED = 2\angle BED = 2x,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle AED,$$

$$\therefore AE = AG = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中,

$$AB = \sqrt{AE^2 - BE^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 2^2}$$

$$= \sqrt{21},$$

$$\therefore AF = AB - BF = \sqrt{21} - 1,$$

又 $\because H$ 为 AD 中点,

G 为 DF 中点,

$\therefore HG$ 为 $\triangle ADF$ 的中位线,

$$\therefore HG = \frac{1}{2}AF$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{21} - 1)$$

$$= \frac{\sqrt{21} - 1}{2}.$$

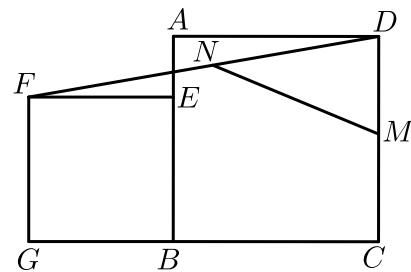
【标注】【知识点】中位线定理及其应用

【知识点】矩形的性质

【能力】运算能力

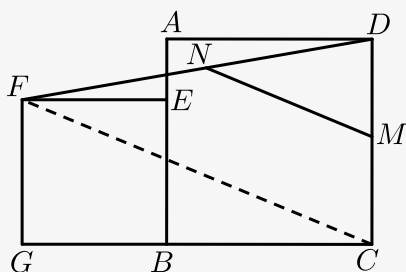
练习4

12. 如图, 已知点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 AB 上, 以 BE 为边向正方形 $ABCD$ 外部作正方形 $BEFG$, 连接 DF , M 、 N 分别是 DC 、 DF 的中点, 连接 MN , 若 $AB = 9$, $BE = 6$, 则 MN 的长为 _____.



【答案】 $\frac{3}{2}\sqrt{29}$

【解析】 如图：连接 CF ，



在 $\text{Rt}\triangle FGC$ 中：

$$CG = 15, GF = 6,$$

$$CF = \sqrt{CG^2 + GF^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = 3\sqrt{29},$$

$\because N, M$ 分别为 DF, CD 中点，

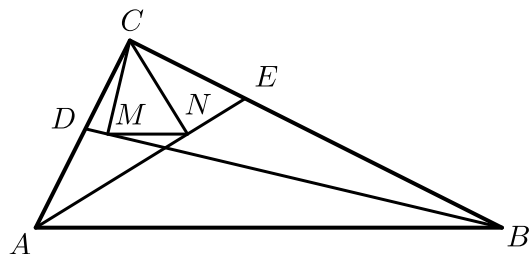
$\therefore MN$ 为 $\triangle DFC$ 中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}CF = \frac{3}{2}\sqrt{29}.$$

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

|| 例题5

13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AE, BD 是角平分线， $CM \perp BD$ 于 M ， $CN \perp AE$ 于 N ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，则 MN 的长为 _____。



【答案】 2

【解析】 延长 CN 交 AB 于 P ，延长 CM 交 AB 于 Q ，

$\because AE, BD$ 是角平分线，

$CM \perp BD$ 于 M ， $CN \perp AE$ 于 N ，

$\therefore$ 易证 $\triangle CBM \cong \triangle QBM$ ，

$\triangle CAN \cong \triangle PAN$ ，

$\therefore CN = NP$ ， $CM = MQ$ ，

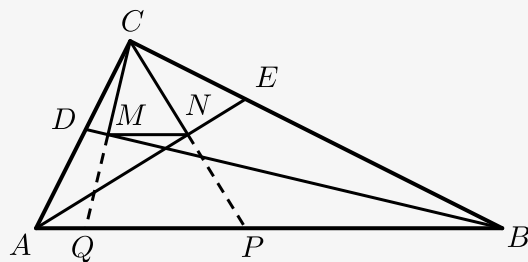
$\therefore MN$ 为 $\triangle CQP$ 的中位线，

$\therefore MN = \frac{1}{2}QP$ ，

又 $\because AC = AP = 6$ ， $BC = BQ = 8$ ， $AB = 10$ ，

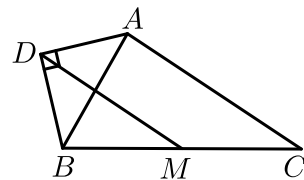
$\therefore QP = BQ - BP = 8 - (10 - 6) = 4$ ，

$\therefore MN = \frac{1}{2}QP = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 。



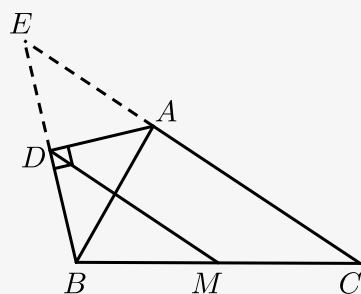
【标注】【知识点】中位线定理及其应用

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 为 BC 的中点， AD 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线，且 $AD \perp BD$ ，若 $AB = 12$ ， $AC = 18$ ，求 MD 的长。



【答案】 15 .

【解析】 延长 CA 、 BD 交于点 E ，



$\because AD$ 平分 $\angle EAB$, $AD \perp BD$,

可证 $\triangle ADE \cong \triangle ADB$,

$\therefore AB = AE, DE = DB$,

$\therefore EC = 30$.

$\because M$ 为 BC 中点,

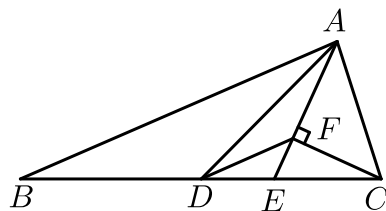
$\therefore DM$ 为 $\triangle BEC$ 中位线,

$\therefore DM = \frac{1}{2}EC = 15$.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

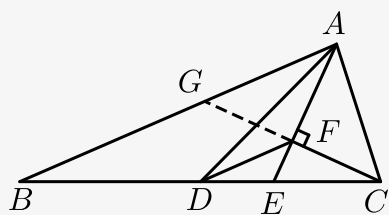
练习5

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是中线, AE 是角平分线, $CF \perp AE$ 于 F , $AB = 5$, $AC = 2$, 则 DF 的长为 ____.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 延长 CF 交 AB 于点 G ,



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle GAF = \angle CAF$,

$\because AF$ 垂直 CG ,

$\therefore \angle AFG = \angle AFC$,

在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle AFC$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle GAF = \angle CAF \\ AF = AF \\ \angle AFG = \angle AFC \end{cases},$$

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle AFC (ASA)$,

$\therefore AC = AG$, $GF = CF$,

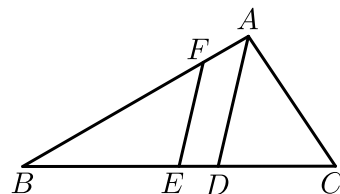
又 $\because$ 点 D 是 BC 中点，

$\therefore DF$ 是 $\triangle CBG$ 的中位线，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}(AB - AG) = \frac{1}{2}(AB - AC) = \frac{3}{2}.$$

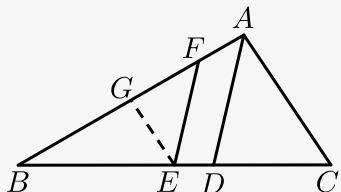
【标注】【知识点】构造中位线

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，点 E 为 BC 的中点， $EF \parallel AD$ ，则 BF 的长为_____.



【答案】8

【解析】取 AB 中点 G ，连接 EG ，



$\because E$ 为 BC 中点，

$$\therefore GE \parallel AC, GE = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$\therefore \angle BGE = \angle BAC,$$

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAC = 2\angle BAD,$$

$\because EF \parallel AD$ ，

$$\therefore \angle BFE = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BGE = \angle GEF + \angle GFE,$$

$$\therefore \angle GFE = \angle GEF,$$

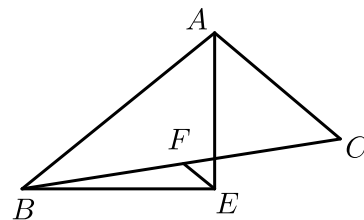
$$\therefore GF = GE = 3,$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}BA = 5, \therefore BF = BG + GF = 5 + 3 = 8.$$

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

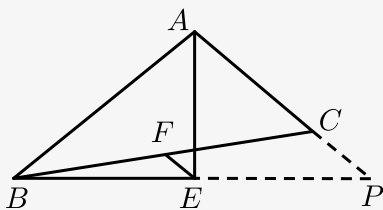
17.

如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ ， AE 平分 $\angle BAC$ ， $BE \perp AE$ 于点 E ， F 是 BC 的中点，若 $AB = 6$ ， $AC = 4$ ，求 EF 的长．



【答案】1．

【解析】如图所示，



延长 AC 交 BE 的延长线于点 P

$\because AE \perp BP$ ，

$\therefore \angle AEP = \angle AEB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$ ， $\angle PAE + \angle APE = 90^\circ$ ．

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle PAE$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle APE$ ，

$\therefore AB = AP$ ．

$\because AE \perp BP$ ，

$\therefore BE = PE$ ．

$\because F$ 是 BC 的中点，

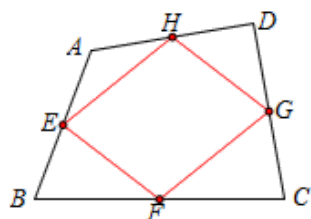
$\therefore BF = FC$ ，

$\therefore EF = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}(AP - AC) = \frac{1}{2}(AB - AC) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ．

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

二、中点四边形

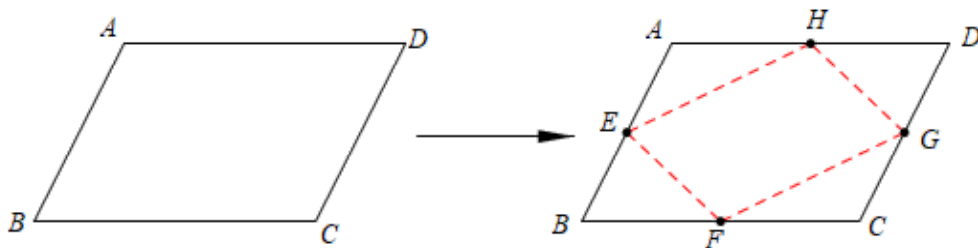
顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点 E ， F ， G ， H ，所得到的新四边形 $EFGH$ 称为_____．



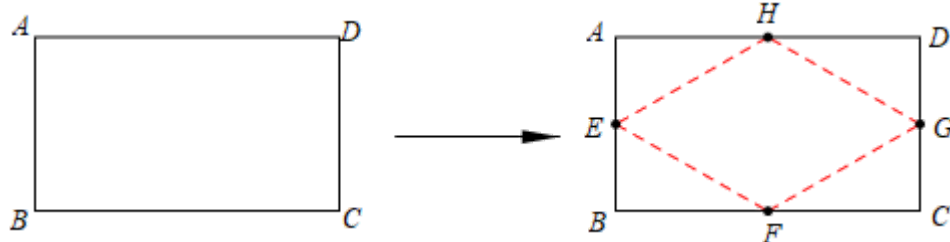
四边形 $HEFG$ 为_____

中点四边形与原四边形的关系：

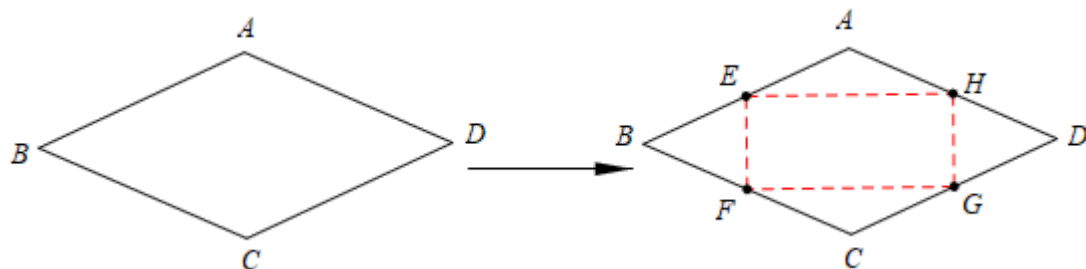
1. 依次连接平行四边形的中点，所得中点四边形是_____



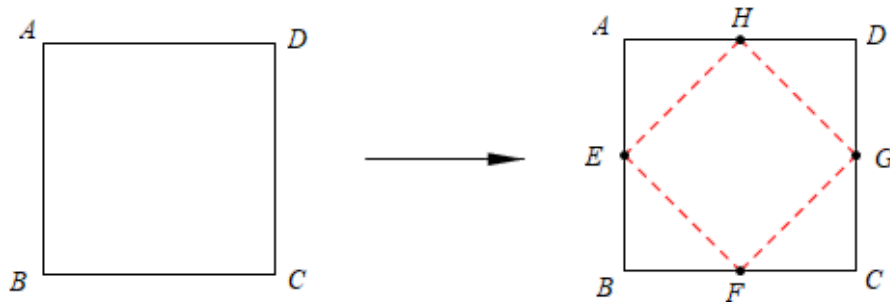
2. 依次连接矩形的中点，所得中点四边形是_____



3. 依次连接菱形的中点，所得中点四边形是_____

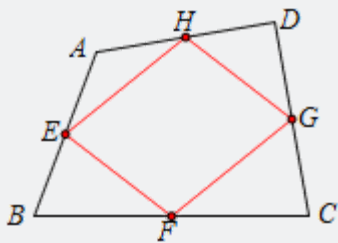


4. 依次连接正方形的中点，所得中点四边形是_____



【教法备注】

1. 顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点 E, F, G, H ，所得到的新四边形 $EFGH$ 称为中点四边形。



四边形 $HEFG$ 为平行四边形

2、中点四边形与原四边形关系证明：

	对角线特征	图形	证明	中点四边形 特殊性
平行四边形	互相平分		$EF \parallel AC \parallel GH$ $EH \parallel BD \parallel FG$	平行四边形
矩形	对角线相等		先是平行四边形， 再 $AC = BD$ 推出 $EF = FG$ 或其他	菱形
菱形	对角线垂直		先是平行四边形， 再 $AC \perp BD$ 推出 $EF \perp FG$ 或其他	矩形
正方形	对角线 既相等 又垂直		先是平行四边形， 再 $AC = BD$ 、 $AC \perp BD$ 推出 $EF = FG$ 、 $EF \perp FG$ 或其他	正方形

总结：

任意四边形的中点四边形一定是平行四边形，在此基础上：

- (1) 若原四边形的**对角线相等**，则中点四边形就是**菱形**
- (2) 若原四边形的**对角线垂直**，则中点四边形就是**矩形**
- (3) 若原四边形的**对角线既垂直又相等**，则中点四边形就是**正方形**
- (4) 若原四边形的**对角线既不垂直又不相等**，则中点四边形就**只能是平行四边形**了

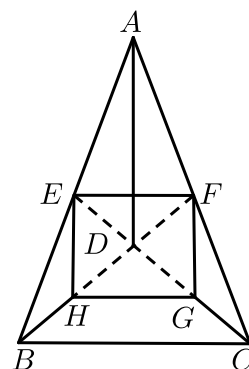
18. 我们把顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫做中点四边形. 已知四边形 $ABCD$ 的中点四边形是正方形, 对角线 AC 与 BD 的关系, 下列说法正确的是().
- A. AC, BD 相等且互相平分 B. AC, BD 垂直且互相平分
C. AC, BD 相等且互相垂直 D. AC, BD 垂直且平分对角

【答案】C

【解析】顺次连接对角线相等的四边形的四边中点得到的是菱形,
顺次连接对角线垂直的四边形的四边中点得到的是矩形,
顺次连接对角线相等且垂直的四边形的四边中点得到的四边形是正方形.
故选C.

【标注】【知识点】中点四边形

19. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 内一点, $BD \perp CD$, $AD = 5$, $BD = 4$, $CD = 3$, E, F, G, H 分别是 AB, AC, CD, BD 的中点, 则四边形 $EFGH$ 的周长是().



- A. 7 B. 8 C. 10 D. 11

【答案】C

【解析】本题主要考查三角形的基本概念和直角三角形.

$$\because BD \perp CD, BD = 4, CD = 3,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

$$\therefore BC = 5,$$

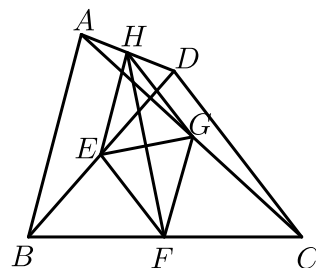
$$\because E, F, G, H \text{ 分别是 } AB, AC, CD, BD \text{ 的中点,}$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}, HG = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}, EH = \frac{1}{2}AD = \frac{5}{2}, FG = \frac{1}{2}AD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长是 } EF + HG + EH + FG = 10.$$

【标注】【知识点】中点类综合计算与证明

20. 如图, E 、 F 、 G 、 H 分别是 BD 、 BC 、 AC 、 AD 的中点, 且 $AB = CD$. 结论: ① $EG \perp FH$; ②四边形 $EFGH$ 是矩形; ③ HF 平分 $\angle EHG$; ④ $EG = \frac{1}{2}BC$; ⑤四边形 $EFGH$ 的周长等于 $2AB$. 其中正确的个数是().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半与 $AB = CD$ 可得四边形 $EFGH$ 是菱形, 然后根据菱形的对角线互相垂直平分, 并且平分每一组对角的性质对各小题进行判断即可得答案.

$\because E$ 、 F 、 G 、 H 分别是 BD 、 BC 、 AC 、 AD 的中点,

$\therefore EF = \frac{1}{2}CD$, $FG = \frac{1}{2}AB$, $GH = \frac{1}{2}CD$, $HE = \frac{1}{2}AB$,

$\because AB = CD$,

$\therefore EF = FG = GH = HE$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形, 故②错误;

$\therefore EG \perp FH$, HF 平分 $\angle EHG$; 故①③正确;

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长 $= EF = FG = GH = HE = 2AB$, 故⑤正确;

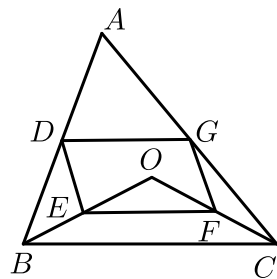
没有条件可证明 $EG = \frac{1}{2}BC$, 故④错误;

$\therefore$ 正确的结论有: ①③⑤, 共3个.

故选C.

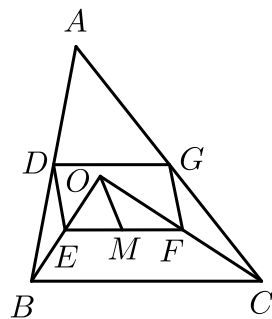
【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

21. 如图1, 点 D 、 E 、 F 、 G 分别为线段 AB 、 OB 、 OC 、 AC 的中点.



(1) 求证：四边形 $DEFG$ 是平行四边形 .

(2) 如图2，若点 M 为 EF 的中点， $BE:CF:DG=2:3:\sqrt{13}$ ，求证： $\angle MOF=\angle EFO$.



【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because D$ 是 AB 的中点， G 是 AC 的中点，

$\therefore DG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DG \parallel BC$ ， $DG = \frac{1}{2}BC$ ，

同理得： EF 是 $\triangle OBC$ 的中位线，

$\therefore EF \parallel BC$ ， $EF = \frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore DG = EF$ ， $DG \parallel EF$ ，

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形 .

(2) $\because BE:CF:DG=2:3:\sqrt{13}$ ，

$\therefore$ 设 $BE=2x$ ， $CF=3x$ ， $DG=\sqrt{13}x$ ，

$\therefore OE=2x$ ， $OF=3x$ ，

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形，

$\therefore DG=EF=\sqrt{13}x$ ，

$\therefore OE^2+OF^2=EF^2$ ，

$\therefore \angle EOF=90^\circ$ ，

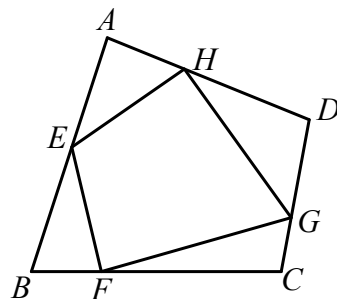
$\because$ 点 M 为 EF 的中点，

$\therefore OM=MF$ ，

$\therefore \angle MOF=\angle EFO$.

练习6

22. 如图，任意四边形 $ABCD$ 中， E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的点，对于四边形 $EFGH$ 的形状，某班学生在一次数学活动课中，通过动手实践，探索出如下结论，其中错误的是（ ）。



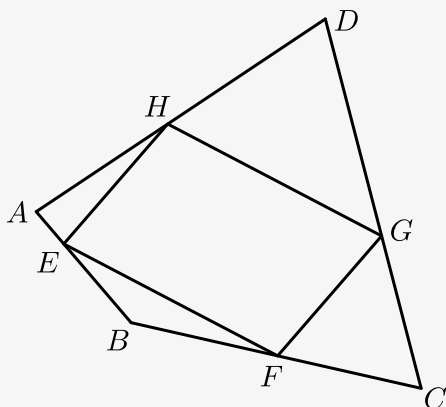
- A. 当 E, F, G, H 是各边中点，且 $AC = BD$ 时，四边形 $EFGH$ 为菱形
- B. 当 E, F, G, H 是各边中点，且 $AC \perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 为矩形
- C. 当 E, F, G, H 不是各边中点时，四边形 $EFGH$ 可以为平行四边形
- D. 当 E, F, G, H 不是各边中点时，四边形 $EFGH$ 不可能为菱形

【答案】D

【解析】A. 当 E, F, G, H 是四边形 $ABCD$ 各边中点，且 $AC = BD$ 时，存在 $EF = FG = GH = HE$ ，故四边形 $EFGH$ 为菱形，故A正确。

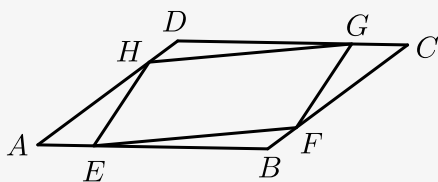
B. 当 E, F, G, H 是四边形 $ABCD$ 各边中点，且 $AC \perp BD$ 时，存在 $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90^\circ$ ，故四边形 $EFGH$ 为矩形，故B正确。

C. 如图所示，当 E, F, G, H 不是四边形 $ABCD$ 各边中点时，若 $EF \parallel HG$ ， $EF = HG$ ，则四边形 $EFGH$ 为平行四边形，故C正确。



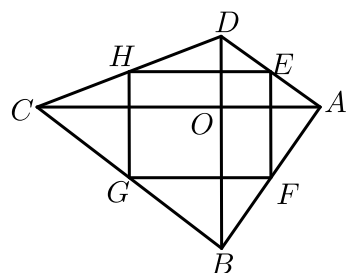
D. 如图所示，当 E, F, G, H 不是四边形 $ABCD$ 各边中点时，若 $EF = FG = GH = HE$ ，则四边形 $EFGH$ 为菱形，故D错误。

故选D .



【标注】【知识点】中点四边形

23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC \perp BD$ ，垂足为 O ，点 E 、 F 、 G 、 H 分别为边 AD 、 AB 、 BC 、 CD 的中点．若四边形 $EFGH$ 的面积12，则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ ．



【答案】 24

【解析】 $\because$ 点 E 、 F 分别为边 AD 、 AB 的中点，

$$\therefore EF \parallel BD, EF = \frac{1}{2}BD,$$

$$\text{同理, } HG \parallel BD, HG = \frac{1}{2}BD, HE \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$$\because EF \parallel BD, AC \perp BD,$$

$$\therefore EF \perp AC,$$

$$\because HE \parallel AC,$$

$$\therefore EF \perp HE,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，又四边形 $EFGH$ 的面积12，

$$\therefore HE \times HG = 12,$$

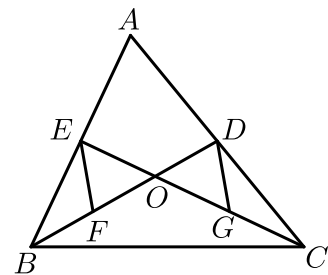
$$\therefore AC \times BD = 48,$$

$$\therefore \text{四边形}ABCD\text{的面积为} \frac{1}{2} \times AC \times BD = 24.$$

故答案为：24 ．

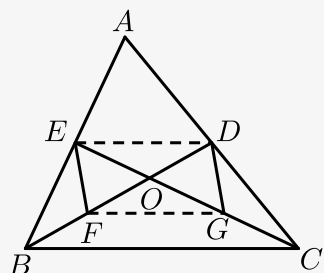
【标注】【知识点】中点四边形

24. $\triangle ABC$ 的中线 BD 、 CE 相交于 O ， F 、 G 分别是 BO 、 CO 的中点，求证： $EF \parallel DG$ ，且 $EF = DG$ ．



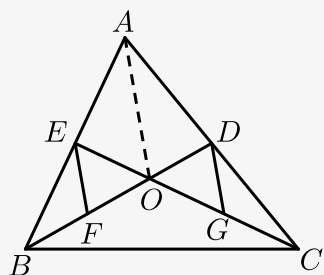
【答案】 证明见解析 .

【解析】 方法一：连接 DE, FG ,



$\because BD, CE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore D, E$ 是 AB, AC 边中点,
 $\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$, 同理: $FG \parallel BC$,
 $FG = \frac{1}{2}BC$,
 $\therefore DE \parallel FG, DE = FG$, $\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形,
 $\therefore EF \parallel DG, EF = DG$.

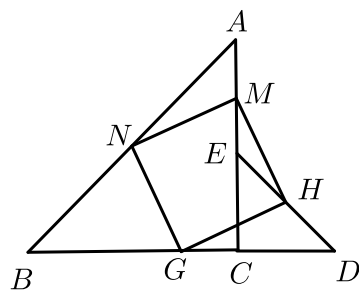
方法二：如图所示，连接 AO .



$\because BD, CE$ 分别是 $\triangle ABC$ 的中线,
 $\therefore D, E$ 分别是 AC, AB 的中点.
 又 $\because F, G$ 分别是 BO, CO 的中点,
 $\therefore EF = \frac{1}{2}AO, EF \parallel AO$,
 $DG = \frac{1}{2}AO, DG \parallel AO$,
 $\therefore EF \parallel DG$ 且 $EF = DG$.

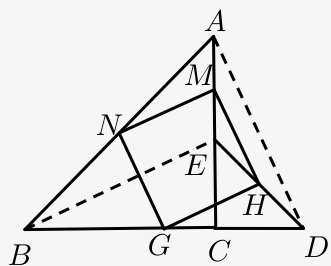
【标注】 【知识点】 构造中位线

25. 如图： $CA = CB$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， M 、 N 、 G 、 H 分别为 AE 、 AB 、 BD 、 DE 的中点．求证：四边形 $MNGH$ 为正方形．



【答案】证明见解析．

【解析】连接 AD 、 BE ，



$\because M$ 、 N 分别为 AE 、 AB 中点，
 $\therefore MN$ 为 $\triangle ABE$ 的中位线，则 $MN \parallel BE$ ，且 $MN = \frac{1}{2}BE$ ，
 同理可得： $GH \parallel BE$ ，且 $GH = \frac{1}{2}BE$ ，
 $NG = MH = \frac{1}{2}AD$ ， $NG \parallel MH \parallel AD$ ，
 $\therefore$ 四边形 $MNGH$ 为平行四边形，
 $\because AC = BC$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACD = \angle BCE = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，
 $\therefore AD = BE$ ，
 $\therefore NG = MH = GH = MN$ ，
 $\therefore$ 四边形 $MNGH$ 为菱形，
 $\because MH \parallel AD$ ，
 $\therefore \angle EMH = \angle EAD = \angle EBC$ ，
 $\because MN \parallel BE$ ，
 $\therefore \angle BEC = \angle NMC$ ，
 $\because \angle BEC + \angle EBC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle NMC + \angle EMH = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle NMH = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $MNGH$ 为正方形 .

【标注】【知识点】正方形的判定

26. 我们给出如下定义：顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫中点四边形 .

- (1) 如图1，四边形 $ABCD$ 中，点 E, F, G, H 分别为边 AB, BC, CD, DA 的中点 . 则中点四边形 $EFGH$ 是 _____ 形 .

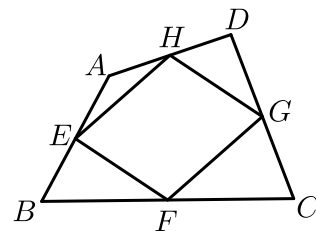


图 1

- (2) 如图2，点 P 是四边形 $ABCD$ 内一点，且满足 $PA = PB, PC = PD, \angle APB = \angle CPD$ ，点 E, F, G, H 分别为边 AB, BC, CD, DA 的中点，试猜想中点四边形 $EFGH$ 的形状并证明 .

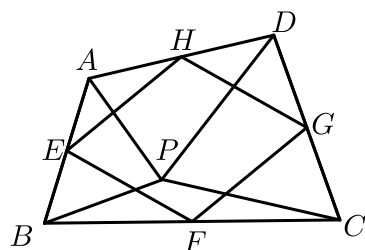


图 2

- (3) 若改变 (2) 中的条件，使 $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$ ，其他条件不变，直接写出中点四边形 $EFGH$ 的形状是 _____ 形 .

【答案】 (1) 平行四边

(2) 四边形 $EFGH$ 是菱形，证明见解析 .

(3) 正方

【解析】 (1) 如图1中，连接 BD ，

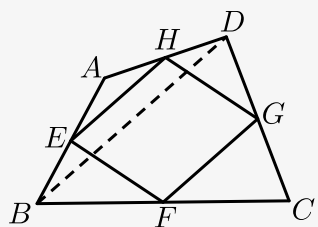


图 1

$\because$ 点 E, H 分别为边 AB, DA 的中点，

$\therefore EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD$ ，

$\because$ 点 F, G 分别为 BC, CD 的中点,
 $\therefore FG \parallel BD, FG = \frac{1}{2}BD,$
 $\therefore EH \parallel FG, EF = GF,$
 $\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2) 如图2, 连接 AC, BD ,

$\because \angle APB = \angle CPD,$

$\therefore$

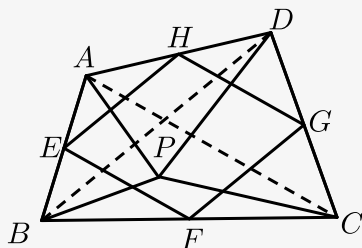


图2

$\angle APB + \angle APD = \angle CPD + \angle APD$, 即 $\angle APC = \angle BPD$,

在 $\triangle APC$ 和 $\triangle BPD$ 中,

$$\begin{cases} AP = PB \\ \angle APC = \angle BPD, \\ PC = PD \end{cases}$$

$\therefore \triangle APC \cong \triangle BPD$,

$\therefore AC = BD$,

点 E, F, G 分别为边 AB, BC, CD 的中点,

$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, FG = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

(3)

如图2中, 设 AC 与 BD 交于点 O ,

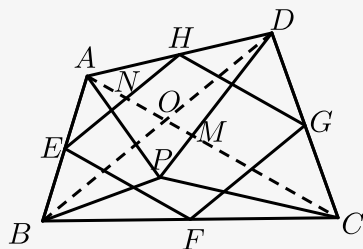


图2

AC 与 PD 交于点 M , AC 与 EH 交于点 N ,

$\because \triangle APC \cong \triangle BPD$,

$\therefore \angle ACP = \angle BDP$,

$\because \angle DMO = \angle CMP$,

$\therefore \angle COD = \angle CPD = 90^\circ$,

$\therefore EH \parallel BD, AC \parallel HG$,

$\therefore \angle EHG = \angle ENO = \angle BOC = \angle DOC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

